Série 10

Exercice S10E1*$^{(*)}$ (20 min) : Le pendule amorti

On considère un pendule simple, de longueur L et de masse m. La masse est attachée à une tige de masse négligeable et inextensible. Ce pendule est soumis à la force de pesanteur et oscille dans un plan vertical. On plonge ce pendule dans l'eau. Il en résulte une force de frottement fluide sur la masse m (on néglige les frottements sur la tige et la poussée d'Archimède), dont les coefficients de viscosité et de forme sont respectivement notés η et K.

a) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du système dans l'approximation des petits angles.

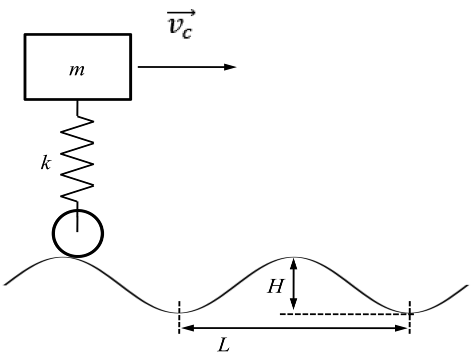
b) Quelle est la forme de la solution $\theta(t)$ pour un amortissement faible ?

c) Tracez l'évolution de l'angle en fonction du temps pour les différents types d'amortissement, en considérant comme conditions initiales un angle $\theta(t = 0) = 0$ et une vitesse initiale non nulle.

Exercice S10E2**$^{(*)}$ (40 min) : Le salaire de la peur (inspiré du film éponyme, Palme d'Or 1953)

On cherche à modéliser le passage d'un camion chargé de nitroglycérine (composé très instable qui explose au moindre choc) sur un champ de bosses (route en « tôle ondulée ») de la façon suivante : un point matériel de masse m avance avec une vitesse horizontale $\vec{v_c}$ constante.

La masse est reliée à un dispositif comportant un ressort amorti sans masse de constante élastique k et de longueur au repos nulle pour simplifier les calculs. La force d'amortissement fluide agissant sur l'allongement du ressort est de type $\vec{f} = -K\eta\vec{v}$. Au bout du ressort, une roue de masse nulle (négligeable par rapport à celle du camion) suit le profil du sol. On considère pour simplifier que la roue est ponctuelle (rayon nul). On suppose aussi que le dispositif qui maintient le ressort à la verticale n'intervient pas dans le mouvement de la masse.



a) Le profil de la route est modélisé par une courbe sinusoïdale, avec des bosses périodiques de hauteur H et longueur L. Montrez que l'équation horaire du point de contact entre la roue et la route, i.e. la hauteur, est donnée par :

$$h(t) = \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} v_c t\right),$$

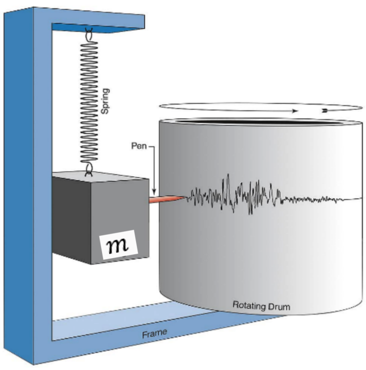
en prenant l'origine des temps telle que la roue soit à mi-chemin entre un creux et une bosse de la sinusoïde.

b) Déduisez-en l'équation différentielle du mouvement de la masse m considérée comme un point matériel (mouvement dans la direction verticale).

c) Existe-t-il une vitesse critique ? Si oui, donnez son expression. Quelle devrait-être la vitesse optimale pour limiter les vibrations du camion ? On considérera pour cette question le cas réel avec un ressort de longueur non nulle.

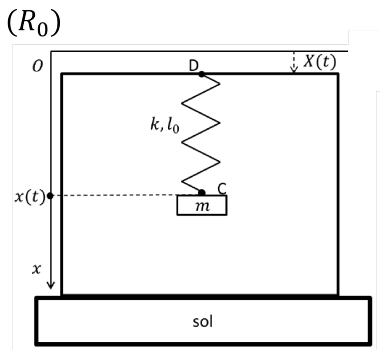
Exercice S10E3** (30 min) : Le sismographe

Un sismographe est un dispositif permettant de mesurer la magnitude des tremblements de Terre. On le modélise par un système constitué par un boitier avec une masse m reliée par un ressort fixé à sa partie supérieur, et le tout reposant sur le sol (voir figure ci-contre). Le ressort est sans masse, avec une constante de raideur k et une longueur à vide l_0. R_0 est un repère fixe qui est attaché à un référentiel galiléen. On repère la position du boitier dans (R_0) par la coordonnée X et la position de la masse m par x.



a) Déterminez x_{eq} la position à l'équilibre de m dans R_0 lorsque $X = 0$.

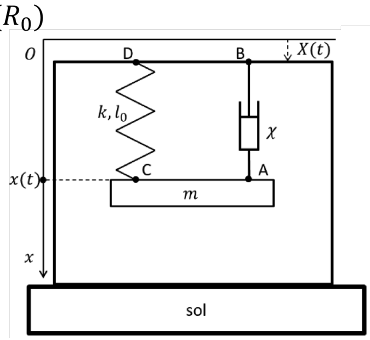
Le sol se met à bouger en raison d'un tremblement de Terre. L'onde de choc se propage à la surface de la Terre et engendre un mouvement du boîtier par rapport au repère fixe R_0. Ce mouvement est décrit par une fonction sinusoïdale $X(t) = b\sin(\Omega t)$.



b) Écrivez l'équation différentielle du mouvement de m dans R_0 lorsque $X(t) = b\sin(\Omega t)$. On notera x_1 le déplacement de la masse m par rapport à sa position d'équilibre.

c) Exprimez la pulsation de résonance et l'amplitude du mouvement de m en régime stationnaire en fonction des données du problème. Que pouvez-vous remarquer sur l'expression de l'amplitude ?

En pratique, un sismographe est composé d'un amortisseur en parallèle du ressort comme décrit par la figure ci-contre. L'amortisseur est caractérisé par un coefficient de frottement visqueux χ.



d) Exprimez la force de frottement créée par l'amortisseur.

e) Écrivez la nouvelle équation du mouvement de la masse m.

* * * * * * *

Exercices supplémentaires

Exercice S10ES1**(*) (40 min) : L'oscillateur forcé et puissance dissipée

On considère un oscillateur harmonique en régime sinusoïdal forcé par une force $\vec{F}_{exc}$, constitué d'un ressort de raideur k accroché à une masse m et amorti par un frottement fluide avec un coefficient de frottement $b_l = K\eta$. On suppose que $\vec{F}_{exc}$ peut s'écrire $\vec{F}_{exc} = F_0 \cos(\omega_e t)\vec{e}_x$, où l'axe des x est pris selon la direction du ressort et dirigé de l'attache vers la masse m.

a) Rappeler l'expression de la position de la masse $x(t)$ en fonction de données du problème et de la pulsation d'excitation ω_e.

b) On donne $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \pi$. Calculer l'énergie dissipée au cours d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$.

c) En déduire la puissance dissipée en régime permanent.

Un oscillateur à ressort amorti, excité à la résonance nécessite une puissance P_r pour compenser l'amortissement. La masse amortie est désignée par m. Si l'on éteint la machine, l'amplitude diminue de moitié en l'espace d'une seconde.

d) Quelle est l'amplitude lorsque la machine est en route?
A.N. : $f_{\text{res}} = 20$ Hz; $P_r = 800$ W; $m = 100$ kg.

On rappelle l'expression de l'amplitude à la résonance :

$$A(\omega_e) = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_e\right)^2}}$$

Exercice S10ES2**$^{(*)}$ (40 min) : Gotham City (extrait examen)

Le Joker a réussi à piéger Batman ! Ce dernier se retrouve suspendu au bout d'une corde de longueur l entre deux hélices géantes tranchantes comme des lames de rasoir. Ces deux hélices tournent à des vitesses variables en alternance de telle manière que le souffle qui en résulte exerce une force totale $\vec{F_h} = F_0 \sin(\Omega t)\vec{e}_\theta$ (perpendiculaire à la corde) sur Batman. On assimile Batman à un point matériel de masse m qui oscille dans un plan contenant les axes de rotation des hélices et on considère la corde comme étant rigide. On néglige de plus les frottements sur la corde.

a) Donnez l'équation différentielle du mouvement de Batman dans l'approximation des petites oscillations.

b) Exprimez l'amplitude des oscillations de Batman ainsi que la pulsation de résonance Ω_r.

c) La vitesse de rotation des hélices est contrôlée par le Joker, de telle sorte que ce dernier peut ajuster la pulsation Ω de la force s'exerçant sur Batman. Par ailleurs, les hélices sont assez éloignées pour que l'approximation des petits angles ne soit plus vraie quand Batman s'en approche. Le Joker étant joueur, il propose au héros, lorsque celui-ci est très proche des hélices, de choisir entre une pulsation légèrement supérieure ou inférieure à la pulsation de résonance Ω_r (calculée au point b). Lequel de ces choix sauvera Batman ? Justifiez sans calcul.